

割合の非加法性の理解を促進する教授法の検討

—ICT を活用した割合の数対生成・参照活動に注目して—

蛭名正司

1. 問題と目的

教科の学習において、科学的概念を学習したとしても、問題解決時に誤った判断が見られることは広く知られている。このような誤った判断を引き起こす学習者の要因として、誤概念の影響（麻柄他，2006）や、知識操作の不十分さの影響（工藤他，2022）などが指摘されている。また、これらの学習者側の要因を念頭に置いたうえで、いかにして問題解決を促進するかについても、幅広く検討されてきている（e.g., 麻柄他，2006；工藤他，2022）。本稿では、これらの先行研究の知見を踏まえつつ、算数・数学科で取り上げられる割合を題材として、割合に関する問題解決を促進するための教授要因を検討することを目的とする。

割合は内包量の一つである。遠山（1978）によれば、量は外延量と内包量に分類され、外延量とは「大きさ」・「広さ」を表した量で、合併の結果を加法で求めることができる加法的な量である。それに対して内包量は2つの外延量の除法で求めることができる量であり、「強さ」を表す量とされる。外延量と内包量の特徴として大きく異なるものに、非加法性の有無がある。すでに述べたように外延量は合併の結果を加法によって導ける一方で、内包量は、合併の結果を加法によって導くことができない。例えば内包量の一つである塩分濃度を例にすると次のようになる。塩分濃度2%の食塩水100gと、塩分濃度3%の食塩水100gを合併したときにできる食塩水200gは、塩分濃度が5%とはならない。この場合の塩分濃度は2%と3%の間になる（この例では、 $(2g+3g)/(100g+100g)$ となり、塩分濃度は2.5%となる）。

上記のように、内包量の非加法性は、外延量との意味の違いを理解する上で、きわめて重要な性質といえる。ところで、内包量は「度」「率」「倍」「比」の下位概念に分類される（遠山，1978）。いずれの量も小学校で学習するが、特に「率」については多くの児童生徒にとって理解が容易でないことが指摘されている（吉田，2003）。また「率」の代表的な量である百分率（パーセント）は、統計量として日常的に接する機会の多い量である。その意味で、百分率で表される割合の概念的理解を促進することは、教育実践上意義のあることといえる。以上から、本研究では内包量の中でも割合に焦点を当て、割合の非加法性の理解を促進するための要因を検討する。

先行研究では、割合の非加法性について、多くの学習者が誤った判断を示すことが指摘されている。Stavy & Tirosh（2000）では、2つのカップに、同じ濃度の砂糖水を用意し、それを1つのカップに入れたときの砂糖水の甘さを判断させる課題を6歳から10歳児に出題した。その結果、多くの子どもが合併された砂糖水はより甘くなると判断することが示された。また、蛭名（2022）では、中学生を対象に、割合の大きさが同じもの同士を合併した際の、割合の大きさを判断させる問題を出題したところ、正しく判断できた中学生は、半数程度にとどまった。さらに、Koay（1998）は、教員養成系の大学院学生を対象とした調査において、割合の非加法性を無視した誤判断が見られたことを指摘している。Koay（1998）で出題された課題は「2つのミックスナッツの袋がある。それぞれの全体量は250gと100gであり、また、50gずつカシューナッツが入っている。2つのミックスナッツを混ぜ合わせるときに、カシューナッツの割

合が何%になるのか」という問題であった。この問題を解決する場合、それぞれの割合（20%と50%）を算出して「25%+50%」という加法を行うと誤りであるにもかかわらず、大学院生の13%~16%が、加法的判断を示したという。以上の先行研究を踏まえると割合の非加法性の理解は、子どもから成人にいたるまで難しいことがわかる。そのような誤りを引き起こす要因としては、割合と外延量との区別が不十分であるために、外延量と同じように加法操作を適用することが考えられる。では、このような割合の非加法性に関する誤った判断を修正するにはどのような教授法が有効であろうか。

割合の非加法性とは異なるものの、内包量と外延量との性質を混同した誤りとして、麻柄（1992）は「内包量の保存」に関する不十分な理解を指摘している。内包量の保存とは、土台量（あるいは全体量）の多少にかかわらず、当該内包量の“強さ”は一定であるという性質である。麻柄（1992）は、密度を題材として、「全体の濃さが10l/m³でした。このうちの5m³を取り出したとき、全体の濃さと5m³の濃さはどちらが濃いか」などの保存課題を用いて内包量の保存の理解を調べたところ、小学6年生の一定数が誤った判断を示すことを指摘した。麻柄（1992）は、内包量の保存の理解を促すために、粒子モデルを用いて粒子間の距離をつまり具合として視覚的に示したところ、内包量の保存性の理解が促進されたと指摘している。このような知覚的に理解可能な情報の提示によって外延量と内包量との性質が異なることの理解を促すことは可能であると考えられる。

しかしながら、麻柄（1992）が取り上げた密度は、空間に占める物体の量で定義される量であり、均等分布の理解が重要となる（銀林，1975）。銀林（1975）によれば、内包量には、均等分布を前提とした量（直接的内包量）と前提としない量（間接的内包量）の両方が含まれ、直接的内包量から間接的内包量へと理解を拡張するには比例の原理を媒介する必要があるという。このことを踏まえると、百分率で表される割合の多くは、間接的内包量に属するものであることから、比例の原理を媒介させることが、割合の意味理解にとって重要といえる。実際に、数学教育学の研究を中心に、割合の指導において比例関係の理解を重視した授業実践が提案されている（田端，2003；高橋他，2014；土屋，2002）。そこでは、比例関係を用いて、同じ割合になる数対（基準量と比較量のペア）が複数存在することが扱われている。割合が同じ値でも、比較量/基準量の数対の組み合わせは無数に存在することが確かめられることで、割合と外延量（比較量/基準量）が異なる性質を持っていることを、納得を伴って理解できると考えられる。

さて、本研究でターゲットとする概念は割合の非加法性である（以下、割合の非加法性ルール）。上記の比例関係に基づいた割合の数対生成だけでは、割合の非加法性ルールを獲得するには不十分である。そこで本研究では、「同じ大きさの割合同士を足し合わせても、割合は変わらない」というルールの獲得を促すために、学習者が作成した数対を任意に合併する学習活動を取り入れる。従来の教授学習に関する心理学研究では、複数の事例が科学的ルールの獲得に有効であることは繰り返し指摘されてきた（e.g., 荒井他，2001；伏見，1995）。また、学習者が意外に思う事例を提示したり、学習者にルールに当てはまらないと思う事例をあげさせたりすることが、ルールの一般性の理解について重要であることが指摘されている（工藤他，2022）。しかし、先行研究で検討されてきた教授法の多くは、教授者が事例を提示するか、学習者が個人で事例を探すことが中心であった。そこで、本研究では、事例の多様性の理解を促す新たな手段として、自身が事例を生成することに加え、他者が考案した事例を参照しながら自身の事例を検討する活動を取り入れる。他者の事例をリソースとして、自身の生成した数対を再検討することで、教授者から与えられた事例や自身が生成した事例にとどまったりすることなく、ルールに当てはまる事例が任意にかつ多様に生成できることを実感をもって理解できると考えられる。以上から本研究では、①他者の割合の数対を参照しながら自身の数対を生成し、②それらの数対を組み合わせで割合を合併する学習活動を通じて、事例の多様性、任意性が理解でき、割合の非加法性ルールの適用が促進されるかどうかを確かめるこ

とを目的とする。

本研究では、上記の数対の生成・参照活動を行う際に、タブレットPCを用いて行う。タブレットPC上で、クラス全員が同時にアクセスできるアプリを活用することで、参加者が生成している割合の数対をリアルタイムで参照し合いながら、自身の数対を生成することができる。この方法は、少人数のグループ学習や、授業終盤でのクラス全体での事例共有とは異なる。というのは、例えば、少人数でのグループ学習では、話し合いながら数対を考案することで、その集団内では多様な事例が出るであろう。しかし、多様性という点で、グループ学習で共有される事例はあくまでもグループメンバーから出される事例にとどまることから、クラス全体の事例の数に比べれば乏しいものとなるといえる。また、グループ学習の後に全体で事例を共有することで、クラス全体でさらに多様な事例を共有することになるという見方もあるだろう。しかし、授業の終盤にクラス全体の事例を知っても、それを活用して、さらに自身で事例を探す活動は難しいと考えられる。そこで本研究では、初めからクラス全体の多様な事例の共有が可能で参照できる学習環境を考案した。このような学習環境により、参加者は事例の任意性・多様性を実感することで、割合の非加法性ルール的一般性を理解できるようになると考えられる。

2. 方法

参加者 福島県内の公立中学校1年生2クラスの71名を調査対象とした。事前調査、授業、事後調査のすべてに参加した生徒54名を分析対象とした（内訳：1組26名、2組28名）。参加者は、中学校1年生の比例・反比例の単元を学習したあとに、本調査に参加した。

調査課題 調査課題は、合併課題、保存課題、立式課題の3種類であった。合併課題は、内包量の非加法性の理解を見るために、3つ以上の割合を合併する問題タイプ（果汁問題、おこづかい問題）、2つの割合を合併する問題タイプ（シュート問題、ケーキ合併問題）、及び合併後の割合を算出する問題タイプ（乗車率問題）を出題した。保存課題は、麻柄（1992）を参考に作成し、全体量を分割しても、部分量の割合には変化がないことの理解を見る課題であった。立式課題は、比の第一用法及び第二用法の公式を用いる割合文章題であり、公式が適用できるかを見る課題であった。以上の調査課題を Figure1（合併課題）及び Figure2（保存課題、立式課題）に示す。事前調査課題および事後調査課題は共通の問題であった。

授業概要 授業は、ワークシート、タブレットPC、電卓を用いて、ワークシートの問題（以下、授業内課題）を解きながら進めた。授業内課題を Figure3 に示す。ワークシートの冒頭には、「割合＝部分量／全体量」という公式を示した。

授業内課題1及び2は、2つのチョコを合併したときに、カカオ率がどうなるのかを判断する問題であった。各課題では、チョコ全体の重さ、カカオの重さ、およびカカオ率を示し、またカカオのつまり具合を粒子で表した図も提示した。図は、合併の前後の状況がわかるように提示した。課題1は、2つのチョコの大きさが同じもの同士の合併状況、課題2は、2つのチョコの大きさが異なるもの同士の合併状況であった。カカオ率が何%かを判断した後に、判断の理由を解答させた。判断理由の選択肢として、「ア．カカオの苦さ（チョコの味）」、「イ．図のカカオのつまり具合」、「ウ．カカオの重さと全体の重さ」、「エ．その他」を提示した。課題1及び2では、まず問題を参加者に解いてもらい、次に、授業者が合併後のチョコ全体の重さおよびカカオの重さそれぞれ加算し、「割合＝部分量／全体量」に代入して割合を求めて確認した。

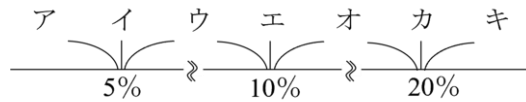
合併課題 (果汁) 「果汁 1%オレンジジュース」があります。このジュースを 100 本分まぜたら、果汁は何%になるでしょうか。次のア～ウから、あなたの考えにあてはまるものを 1 つ選び、記号に○をつけましょう。その他の場合は、() に記入してください。

【ア. (正答) 汁 1%のまま変わらない イ. 果汁 100%になる ウ. その他】

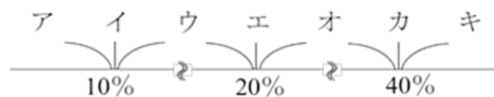
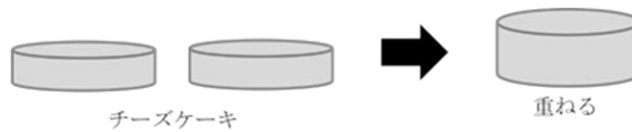
(おこづかい) 毎月もらったおこづかいのうち、10%を貯金箱で貯金しました。6か月間で貯金箱にたまったお金は、もらった金額全体の何%になっているでしょうか。次のア～ウから、あなたの考えにあてはまるものを 1 つ選び、記号に○をつけましょう。その他の場合は、() に記入してください。

【ア. (正答) もらったおこづかい全体の 10%がたまっている イ. もらったおこづかい全体の 60%がたまっている ウ. その他】

(シュート) サッカーの試合でシュートの成功率を調べました。シュートの成功率は、試合の前半が 10%、試合の後半も 10%でした。このとき、試合全体のシュートの成功率は何%になるでしょうか。次のア～キからあなたの考えにあてはまるものを 1 つ選び、記号に○をつけましょう。(正答エ)



(ケーキ合併) たかしさんとさくらさんはチーズを使ってチーズケーキを作りました。2人とも、ケーキ全体の重さに対してチーズの重さが 20%になるように作りました。2人はより大きなチーズケーキを作るためにそれぞれが作ったチーズケーキを重ねて 2 段重ねのチーズケーキを作りました。このとき、2段重ねのチーズケーキ全体の重さに対して、チーズの重さの割合は何%になりますか。ア～キからあなたの考えにあてはまるものを 1 つ選び、記号に○をつけましょう。(正答エ)



(乗車率) 3両編成の電車があります。A 車両、B 車両、C 車両の定員、乗客数、乗車率は下の表のようになっています。このとき、電車全体の乗車率は何%になりますか。また、そのように考えた理由を () に記入しましょう。(正答 25%)

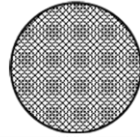
	A 車両	B 車両	C 車両
定員	80 人	100 人	80 人
乗客数	20 人	25 人	20 人
乗車率	25%	25%	25%

$$\text{乗車率} = \frac{\text{乗客数}}{\text{定員}}$$

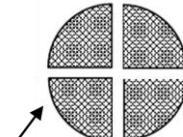
Figure1 調査課題 (合併課題)

保存問題 花子さんは、チーズを使ってチーズケーキを作りました。チーズケーキは、ケーキ全体の重さに対して、チーズの重さの割合が40%でした。このチーズケーキを食べようと思い、下の図のように4つに切り分けました。このとき、もとのチーズケーキ全体の重さに対するチーズの重さの割合と、1人分のチーズケーキ全体の重さに対するチーズの重さの割合は、どちらが大きいですか。ア～ウからあなたの考えあてはまるものを1つ選び、記号に○をつけましょう。またそのように考えた理由を()に記入してください。

【ア. もとのチーズケーキの方がチーズの割合は大きい イ. 1人分のチーズケーキの方がチーズの割合は大きい ウ. (正答) どちらも同じ割合】



もとのチーズケーキ



1人分のチーズケーキ

立式問題 (第二用法) 36人のクラスで、犬が好きな子どもの割合は75%でした。このとき犬が好きな子どもは何人いますか。犬が好きな子どもの人数を求める式を、次のア～カから1つ選びましょう。また、それ以外の式の場合は「カ. その他」に記入してください。なお、75%は、小数(0.75)にして計算します。

【ア. $36 \div 0.75$ イ. $0.75 \div 36$ ウ. (正答) 36×0.75 エ. $36 - 0.75$ オ. $36 + 0.75$ カ. その他】

(第一用法) 32人のクラスで、なわとびが好きな子どもは8人いました。なわとびが好きな子どもはクラス全体の何%ですか。なわとびが好きな子どもの割合を求める式を次のア～カから1つ選びましょう。その他の場合は()に記入してください。

【ア. (正答) $(8 \div 32) \times 100$ イ. $(32 \div 8) \times 100$ ウ. $(32 - 8) \times 100$ エ. $(32 \times 8) \times 100$ オ. $(32 + 8) \times 100$ カ. その他】

Figure2 調査課題 (保存課題/立式課題)

課題2の解答を確認した後に、「(課題) 1, 2からいえることは何ですか?」と質問し、ワークシートの「割合の大きさが(①)もの同士を足し合わせても、割合の大きさは(②)。」の空欄に入る語句を参加者に考えてもらい、数名の参加者の語句を紹介した。

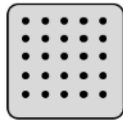
課題3は、タブレットPCを用いてカカオ率が60%になるように任意の割合の数対(カカオの重さ/チョコ全体の重さ)を作ってもらった活動であった。参加者全員がクラスごとに1枚のGoogleスプレッドシートを共有し、各自が考案した数対を相互に参照しながら取り組むように指示した。また数対が60%になっているかを電卓で確認するように指示した。

課題4は、課題3で各参加者が作成した数対を参照しながら、カカオ率が60%のチョコの「つめ合わせセット」を作成するように伝えた。この課題では、様々な形の付箋を配布したうえで、付箋1枚をチョコ1個とみなし、その付箋に割合の数対を記入し、チョコを自由に組み合わせるように伝えた。最後に複数のチョコを合併しても60%になっているかを確認するように指示した。また、付箋を貼り終えた後、タブレットPCのカメラで「つめ合わせセット」を撮影し、画像をアップロードするように伝えた。

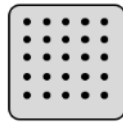
授業終了後、「ふり返り」として、Googleフォーム上に、「課題3で、クラスの人々の数値ややり方を参考にして考えたか」と質問し、選択肢として「1. 初めからクラスの人々の数値を参考に考えた。2. 最初は自分で考えたが、途中でクラスの人々の数値を参考にして、自分の数値を考え直した。3. 最初から最後までクラスの人々の数値を参考にしなかった。」を提示した。さらに、「1」を選択した参加者には、「クラスの人々のどのような数値を参考にしましたか? (数値を忘れた場合はスプレッドシートを見直してもかまいません)

1. チョコレートの中にカカオがどれくらい含まれているかを表す割合を「カカオ率」と呼ぶことにします。カカオ率40%のチョコが2個あり、下の図のように表されています。2個のチョコの「チョコ全体の重さ」と「カカオの重さ」を測ったところ、下のようになっていました。2個のチョコを合わせて大きなチョコを作ったとき、大きなチョコのカカオ率は何%になりますか？

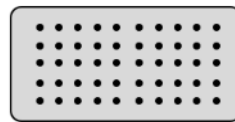
※●はカカオを表すとします。



カカオ率 40%
カカオの重さ 20g
全体の重さ 50g



カカオ率 40%
カカオの重さ 20g
全体の重さ 50g



カカオ率
() %

あなたは何を手がかりにカカオ率を考えましたか？

- ア. カカオの苦さ (チョコの味)。
- イ. 図のカカオのつまり具合。
- ウ. カカオの重さと全体の重さ
- エ. その他

2. カカオ率80%のチョコが2個あり、下の図のように表されています。2個のチョコを合わせて大きなチョコを作ったとき、大きなチョコのカカオ率は何%になりますか？



カカオ率 80%
カカオの重さ 24g
全体の重さ 30g



カカオ率 80%
カカオの重さ 32g
全体の重さ 40g



カカオ率
() %

あなたは何を手がかりにカカオ率を考えましたか？

- ア. カカオの苦さ (チョコの味)。
- イ. 図のカカオのつまり具合。
- ウ. カカオの重さと全体の重さ
- エ. その他

1, 2からいえることは何ですか？

割合の大きさが () もの同士を足し合わせても、割合の大きさは () 。

3. タブレットで取り組もう (以下の問題は Google スプレッドシート上で提示)

カカオ率 60%のチョコの「つめ合わせセット」を作りたいと思います。この「つめ合わせセット」には小ささまざまなチョコを入れることができます。チョコが好きな人にはできるだけ大きいチョコ、チョコが苦手な人にはできるだけ小さいチョコを食べてもらいたいと思います。

カカオ率が 60%になるように、「チョコ全体の重さ (g) と「カカオの重さ (g) の組み合わせを 1人1つ考えて下の表に記入してみよう。」

4. 問題3で、様々な大きさのチョコを考えました。これらのチョコを組み合わせ、チョコのつめ合わせセットを作ってみよう。付箋にチョコ一つ分のカカオの重さとチョコ全体の重さを記入し、下の枠につめ合わせセットを作ってください。なお、使用するチョコの個数や種類は自由です。実際に 60%になったかを確認して、その結果も書いておこう。(図や解答欄は省略)

Figure3 授業内課題

ん)」、「3」を選択した参加者には、「クラスの人の数値を参考にしなかった理由は何ですか？（特になければ、「なし」と入力してください）」という追加の質問を行った。最後に、「今日の割合の授業で、わかったこと、納得したこと、気づいたこと、わからなかったこと、疑問に思ったことなどを自由に入力してください。」という質問を提示した。

手続き 事前調査・授業・事後調査は、連続した2コマ（1コマ50分）の授業で実施され、いずれも筆者が実施した。また、事前調査の時間は約20分、授業時間は約50分、事後調査は約15分で実施された。また、授業では、数学科教諭が補助として入った。調査の実施にあたって、学校長及び数学科教諭の許可を得た。授業中の様子を記録するためにビデオカメラを使用し、教室の背後から授業者が映るように黒板側を撮影した。授業中に使用したタブレット PC は参加者が普段使用しているものを使用した。また、参加者に配布したワークシートを説明する際に、大型モニターに授業内課題を映しながら説明した。電卓や付箋は、授業者が用意し、授業中に必要な場面で配布した。

3. 結果と考察

以下の分析を行うにあたり、2つのクラスの事前の理解状況が等質であるかどうかを確認しておく。事前調査の合併課題5問の正答数をクラス間で比較したところ、有意差は見られなかった ($t(52)=1.35, n.s.$)。また、授業の進行も2つのクラスではほぼ同様であったことから、以下の分析は2つのクラスを統合して行う。

3.1 事前・事後調査の結果

合併課題 事前調査の結果を Table1 に示す。果汁問題が80%と高い正答率であったが、それ以外の問題（おこづかい、シュート、ケーキ合併、乗車率）は、5割～7割程度にとどまった。このことから、本研究の調査参加者は、割合の非加法性の理解を促進する教授法の有効性をみる対象者として妥当であると考えられる。また、果汁問題のみ事前の正答率が高かった理由として、ジュースなどの溶液を混ぜる経験は、参加者の多くが経験していると考えられ、そのような経験から、ジュースの濃さは、合併しても変わらないと判断した参加者が多かったと考えられる。また、誤答の内容としては、誤りの中でも、数値を合併する誤りが最も多く見られ、果汁課題で20%、おこづかい課題で28%、シュート課題で15%、ケーキ合併課題で19%に達した。このことから、合併状況においては、割合は外延量のように加法が可能であると理解している参加者が一定数いることが示唆された。

Table1 事前・事後調査の正答率 (N=54)

	事前	事後
合併課題		
果汁問題	43 (80)	48 (89)
おこづかい問題	38 (70)	45 (83)
シュート問題	37 (69)	48 (89)
ケーキ合併問題	37 (69)	48 (89)
乗車率問題	30 (56)	44 (82)
(適切な理由)	22 (41)	33 (61)
保存課題		
ケーキ分割問題	35 (65)	44 (82)
立式課題		
第1用法	36 (67)	38 (70)
第2用法	36 (67)	34 (63)

次に、事後調査の結果について述べる。事後調査の結果を Table1 に示す。果汁問題、おこづかい問題、シュート問題、ケーキ合併問題ではいずれも正答率が 8 割を超えた。また乗車率問題は、正しく数値を算出できた参加者は 82%に達したものの、判断理由まで適切であったもの限定すると正答率は 61%にとどまった。しかし、全体として、本研究で実施した授業は割合の非加法性の理解を促進する上で、一定の効果を示したといえる。

保存課題 保存課題は、事前調査の正答率が 65%であったが、事後調査では、82%に上昇した。このことから保存課題についても正しい判断が促進されたと考えられる。保存課題は、授業内では直接取り上げていないものの、全体の大きさが変わったとして、割合が変わらないというより一般化された形で、ルールが獲得された可能性が考えられる。

立式課題 立式課題においては、事前調査及び事後調査とも正答率は 6 割～7 割程度にとどまった。授業では、割合＝部分量／全体量を提示し、割合を求めるときには、この公式に値を代入することを繰り返して説明した。しかし、正しい立式を選択できた参加者は事後でも 7 割以下にとどまったことから、本授業の内容では、公式の適用を促す効果は見られなかったといえる。

3.2 授業内課題の結果

本研究で実施した授業は、参加者が授業内課題を解決し、授業者がその解答解説を提示しながら進められた。以下では、ワークシートに記述された解答結果をもとに、参加者の授業中の理解状況を分析する。

授業内課題 1, 2 は部分量／全体量と割合、さらに部分量の分布を示す図 (Figure3 参照) も提示したうえで、2 つの物体を合併した際に、割合はどうかを判断する問題であった。まず、授業者が問題を説明し、電卓の使用を認めた上で判断させた。その結果、問題 1 では 1 名が無記入であったが、それ以外の全員 (53 名) が割合 (カカオ率) は「変わらない」と判断し、そのうちの 48 名 (91%) が「カカオの重さと全体の重さ」を手がかりとしていた。一方で、図を手がかりに判断した者は 4 名 (8%) にとどまった。授業者が問題 1 の解答を提示し、合併後の部分量／全体量を計算し、割合は 40%になることを確認した。

次に、問題 2 を提示した。問題 2 は、大きさが異なるチョコ同士を合併した場合のカカオ率を判断する問題であった。解答は、参加者全員が合併前と同じ割合である「80%」と記入し、手がかりとして「カカオの重さと全体の重さ」を利用した者は 51 名 (94%) であり、残りは未記入であった。

割合の非加法性ルールとして、「割合の大きさが (①) もの同士を足し合わせても、割合の大きさは (②) 。」を提示し、空欄に入る語句を記入するように指示したところ、①には、「同じ」「等しい」、②には「変わらない」「変化しない」「等しい」「同じ」という語句が記入されていた。机間指導では、空欄の参加者もわずかにいたが、解答結果をクラス全体で共有した後は、ほぼ全員が適切な語句を記入していた。

問題 3 は、特定の割合 (カカオ率 60%) になるように任意の部分量／全体量を生成する問題であった。Google スプレッドシート上に問題 3 を提示し、1 つのスプレッドシートを参加者全員で共有した。授業者が問題を読み上げたあと、例として、出席番号 0 を提示しながら部分量「6g」全体量を「10g」の組み合わせでは、カカオ率が 60%になることを示した (Figure4 の「No.0」)。これを踏まえて、カカオ率が 60%になる部分量／全体量の組み合わせが他にないかを探そうに指示し、どのように求めたかも入力してもらった。作業中は、近くに座っている参加者同士で質問し合ったりしてもよいことを伝えた。また、スプレッドシートは、教室前方に設置した大型モニター上にも表示し、授業者は参加者が数対を考えている時間に、すでに入力されている数対を取り上げて、クラス全体に向けて紹介した。

Figure4 は、1 クラス分の入力結果を示したものである。「カカオの重さ」と「チョコ全体の重さ」の数

No.	氏名	カカオの重さ (g)	チョコ全体の重さ (g)	割合	どうやって求めましたか？
0	授業者氏名	6	10	0.6 (60%)	比例/公式/○×0.6, など
1		60 恒河沙	100 恒河沙	0.6 (60%)	割合の公式
2		18	30	0.6 (60%)	○×0.6
3		4	12	0.6 (60%)	
4		114	190	0.6 (60%)	○×0.6
5		72	120	0.6 (60%)	○×0.6
6		0.6	1	0.6 (60%)	比例
7		600 不可思議	1000 不可思議	0.6 (60%)	公式
8		18	30	0.6 (60%)	○×0.6
9		24	40	0.6 (60%)	比例
10		1860	3100	0.6 (60%)	○×0.6
11		1.2	2	0.6 (60%)	比例
12		12	20	0.6 (60%)	比例
13		1842	3070	0.6 (60%)	3070×0.6
14		600 京	1000 京	0.6 (60%)	比例
15		119.8	333	0.6 (60%)	比例
16		180	300	0.6 (60%)	
17		90 那由多	150 那由多	0.6 (60%)	90 那由多 ÷ 150 那由多
18		60	100	0.6 (60%)	比例
19		60 不可説不可説転	100 不可説不可説転	0.6 (60%)	
20		30	50	0.6 (60%)	50×0.6
21		60 阿僧祇	100 阿僧祇	0.6 (60%)	60 阿僧祇 ÷ 100 阿僧祇
22		42	70	0.6 (60%)	42 ÷ 70
23		25.2	42	0.6 (60%)	42×0.6
24		21	35	0.6 (60%)	35×0.6
25		30	50	0.6 (60%)	50×0.6
26		180	300	0.6 (60%)	比例
27		600	1000	0.6 (60%)	1000×0.6
28		60	100	0.6 (60%)	100×0.6

※ 「No.」は、参加者の出席番号とは異なる。網掛け部分は参加者の編集可能領域を示す。

Figure4 授業内課題_問題4の解答結果 (1クラス分)

値の組み合わせは、No.2の「18, 30」やNo.12「12, 20」のように、授業者の例示した数値に近いものを挙げる参加者があげる一方で、No.10の「1860, 3100」やNo.13の「1842, 3070」のようにかなり大きい数値を挙げる者もいた。また、No.1の「60 恒河沙, 100 恒河沙」、No.7の「600 不可思議, 1000 不可思議」など、現実的には考えにくいチョコの大きさを入力した参加者も6名ほど見られた。また、部分量/全体量の組み合わせが0.6になっていない参加者も2名 (No.3, No.15) 見られたが、それ以外の者は、全員正しい数値の組み合わせを生成することができた。参加者が生成した数値を全体として見ると、同じ数値の組み合わせがほとんどないことがわかる。このことは、他者の数値を参考にしながら、他者とは異なるオリジナルの数対を生成しようとしたためと考えられる。また、「どうやって求めましたか？」に入力された内容を見ると、公式が17名、比例が8名、空欄が3名であった。公式の利用が多かった理由としては、授業の冒頭に公式の説明をしたことが考えられる。

問題3ではほぼ全員の入力が終わったことを確認して再びワークシートに戻り、問題4を説明した。問題4は、問題3で参加者が生成したカカオの重さ/チョコ全体の重さを自由に組み合わせ、「チョコのつめ合わせセット」を作成する課題であった。この課題で参加者が作成した「つめ合わせセット」の一部をFigure5に示す。

付箋一枚に種類の数対を記入し、それをワークシートの枠内に貼り付けることで、「つめ合わせセット」とみなした。やり方がわからない参加者は、近隣の参加者と教え合いながら作業に取り組む様子が見

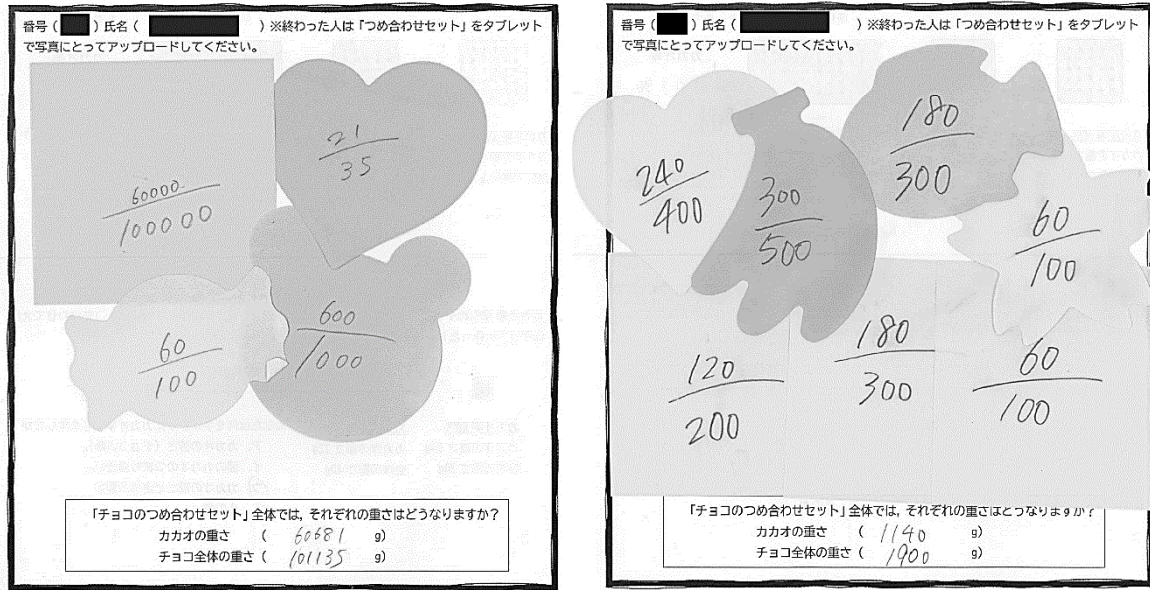


Figure5 授業内課題_問題4の解答結果の一部 (2名分)

られた。その結果、Figure5に示すように、各自が任意の数対で「つめ合わせセット」を作成していた。部分量、全体量をそれぞれ合計して、割合を求めるとどうなるかを確認することも指示した。合計値の計算まで終えた参加者には、「つめ合わせセット」をタブレットPCのカメラ機能で撮影し、共有フォルダにアップロードするように指示した。授業の最後には、参加者数名の「つめ合わせセット」を大型モニターに写し、同じ大きさの割合同士をどのような組み合わせで足し合わせても、割合の大きさは変わらないことを確認した。

3.3 他者解答の参照の有無と割合の非加法性の理解との関連

本研究では、授業内課題の問題3を解答する際に、他者の解答の参照活動を取り入れた。具体的には、問題3では、数値を生成する際に、他者の解答を参考にしてもよいことを伝えた。授業後のアンケートでは、問題3の解決場面において、他者の解答を参考に自身の解答を作成したかを質問した。その結果、「初めからクラスの人々の数値を参考に考えた。」(以下、初めから参照)を選択した参加者は16名、「最初は自分で考えたが、途中でクラスの人々の数値を参考にし、自分の数値を考え直した。」(途中から参照)を選択した参加者は17名、「最初から最後までクラスの人々の数値を参考にしなかった。」(最後まで非参照)を選択した参加者は21名であった。

これらの3つの参照タイプ間で事前から事後にかけて、合併課題の合計点がどのように変容したのかを比較した(Figure6)。その結果、調査時期の主効果のみ有意であり($F(1,51)=21.2, p<.05$)、参照タイプ的主効果および、調査時期と参照タイプとの交互作用は有意ではなかった($F(2,51)=0.18, n.s.$; $F(2,51)=0.25, n.s.$)。このことから、他者の数値を参照したかどうかによらず、事前から事後にかけて割合の非加法性の理解は促進されたことが示唆された。この点をより詳細に検討するために、他者の解答を参照しなかった参加者はなぜ参照しなかったのか、自由記述を分析した。その結果、「自分でできたから」「自分で考えた数値だとどうなるのか」「自分の力でやりたかったから」という記述が数名に見られた。このことから、他者の数値を参照しなかった参加者は、自分なりに試行錯誤して考えたい者が多かったといえる。それに対して、初めから他者を参照した参加者は自身で生成した数値に自信がない、あるいはそもそもどのような数値を生成すればいいのかわからなかった可能性がある。今回の授業では、そのような参加者であって

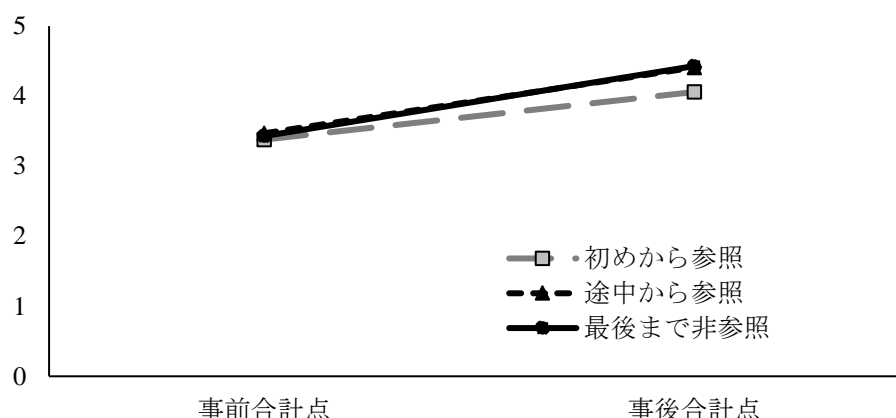


Figure6 参照タイプ別の合併課題5問の正答数の変化

も、他者が生成した数値を参照しながら自分の数値を生成することで、事後調査では自力で数値を生成した参加者と同程度の正答数まで到達することが可能であったといえる。

3.4 授業の感想

授業を終えた後に、わかったことやわからなかったことなどを自由に記入してもらった。参加者の記述内容を「A. 非加法性ルールへの言及」、「B. 授業で扱った具体例への言及」、「C. 授業全体に関する言及」、「D. 大きい数に言及」の4つのカテゴリーに分類した (Table2)。

「割合は同じ割合が合わさっても、割合は変わらないことがびっくりした (A.1)」というように、参加者にとって、非加法性ルールは驚きをもたらすものであることも示唆された。非加法性ルールは、教科書等では明確には扱わない内容であることから、今回の授業で扱うことで初めて明確に理解できたと考えられる。非加法性ルールについて言及した参加者が一定数存在したことは今回の授業の有効性を支持する傍証となるといえる。

Table2 授業の感想

A. 非加法性ルールに言及

1. 割合は同じ割合が合わさっても割合は変わらないことがびっくりしました。
2. 割合の大きさが等しい者同士を足し合わせても割合の大きさは変わらない事がわかった。
3. 割合が等しいもの同士を足し合わせても、割合は変わらないというのが、改めて理解することができた。

B. 授業で扱った題材について言及

1. カカオの重さがいろんな重さがあったこと。
2. 100分の60の0を増やしても同じことがわかった。
3. とても大きな数同士でも必ず0.6になるということが分かった。

C. 授業全体に関して言及

1. おもしろかった。
2. 割合のことについてさらに詳しく知れた。
3. 割合は苦手だったけど解けるようになった気がする。

D. 大きい数に言及

1. 不可説不可説転は0が37個つくことがわかった。
2. 無量大数は実際はどんな大きさの数なのか疑問に思いました。

一方で、「カカオの重さがいろんな重さがあったこと (B.1)」「100分の60の0を増やしても同じことがわかった (B.2)」という感想は、授業で扱った事例に関する言及といえる。この感想自体は誤りではないが、授業のねらいは、さらにそこから一般化した非加法性ルールの獲得であることを踏まえると、一般化した形でルールを獲得するにはどのような方法が有効か、今後の検討課題といえる。

また、今回の授業では、数対の生成活動を参加者に自由に行わせた結果、極端に大きい数を生成する参加者が数名いた。そして授業後の感想にも、「不可説不可説転は0が37個つくことがわかった (D.1)」というように、わかったこととして記述した者がいた。これらの参加者が、今回の授業で最も印象深かった点として「不可説不可説転がわかったこと」をあげていたとすれば、それは非加法性ルールの獲得からは注意がそれてしまったと言わざるを得ないであろう。一方で、このように極端に大きい数であっても割合は同じになっているということの理解につながるのであれば、参加者の考えを大事にする必要があるといえる。

4. 討論

本研究は、割合の非加法性ルールの適用を促すために、他者の割合の数対を参照しながら生成する活動によって、割合の数対に任意性・多様性があること、さらにそれらの合併の仕方についても、任意性・多様性があることの理解を促進する授業を実施した。その結果、事後調査課題の合併課題では、乗車率課題は理由の記述も含めた厳しい基準では、正答率は6割程度にとどまったものの、その他の課題では、おおむね8割以上の正答率であり、非加法性ルールの獲得は促されたといえる。

以上の効果をもたらした教授要因を検討したい。本研究の授業では、まずは均等分布を図示して、部分量(カカオ)のつまり具合は全体を合併しても変わらないことを示した。そして、このことを部分量/全体量を用いて割合を実際に算出することで、計量的にもその正しさを参加者に示した。授業中の参加者の様子からは、この時点で、割合の非加法性ルールの妥当性を認めている者が大半である様子がうかがえたことから、図と数値の提示は非加法性ルールの導入にとって有効であったと考えられる。また、非加法性ルールの一般性を確かめる活動では、他者の生成した数対を参照しながら自身の数対を生成する活動を取り入れた。その結果、授業者からは、「他の人と同じものを作らないように」などの指示はしていないにもかかわらず、ほとんどの参加者が、他者とは異なる数対を生成し (Figure4 参照)、また、数対の組み合わせも誰一人同じものがない、参加者全員がオリジナルの「つめ合わせセット」を作成することが可能であった。従来の研究では、単独事例よりも複数の事例提示が有効であることを示す研究はあったが、今回の授業のように他者の事例を参照しながら参加者が事例を生成し、ルールに合致しているかを確かめる活動も、ルールの一般化を促進する上で有効である可能性が示唆された。

さて、本研究では、割合の数対を生成する場面で、他者の数値を参照したかどうかを事後的に調べ、参照の仕方によって、合併課題の成績に違いが生じるかを検討した。分析の結果、始めから参照しても、まったく参照しなくても成績の上昇の程度には統計的な差異は見られなかった。特に初めから参照した参加者は、どのような数値を考えればよいかについて、課題を提示された時点では検討がつかなかった可能性がある。このような参加者にとっては、他者の解答を早い段階から参照できることで、どのような数値を生成すればよいか、解決の方策が立てやすくなった可能性が考えられる。また、多様な事例を見ながら自分なりの数対の生成が可能になったことで、初めから参照した参加者グループにおいても、事後では、その他のグループと同程度の成績に上昇したと考えられる。

また、本授業では直接取り上げていない保存課題においても、正答率が80%を超えたことから、全体量の大きさが変わっても、割合は変わらないというように、より一般化された形でルールが獲得された可

能性が考えられる。今回の授業からは、教授内容のどの部分がこの点の理解につながったかは判断できないものの、麻柄（1992）では、粒子モデルを提示することで、内包量の保存性の理解が促進されることを示している。そのことを踏まえると、本研究においても粒子モデルを提示したことが、内包量が保存されることの理解の促進に一定の役割を果たした可能性が考えられる。この点はさらに今後検討する必要があるだろう。

最後に、本研究の限界を述べる。本研究は、複数の教授要因を取り入れた構成法的手法で実施されたため、どの要因が非加法性ルールの獲得に有効であったかを断定することはできない。本研究では、均等分布の図示による直感的理解と計算による計量的理解、さらには、任意の数対の生成及び合併による非加法性ルールの確認が、非加法性ルールの一般化を促進したと考えられるが、これらの学習活動が、どのようにあるいはどの程度一般化に寄与したのかは、今後明らかにする必要があると考えられる。また、本研究では、事後の合併課題ではほぼ8割以上の正答率を達成したものの、乗車率課題では、理由の記述まで含めた正しい解答は、6割程度にとどまった。この結果は、非加法性ルールが、数値レベルで「割合は変わらない」ことが表面的に理解された可能性を示唆している。すなわち、数操作だけを表面的に理解した学習者は、乗車率課題において非加法性ルールの根拠として記述することができなかつたのではないかと考えられる。その意味で、数値レベルのみで多様性を扱うだけでなく、カカオ率以外の事例においても、同じように非加法性ルールが成立することを確認する必要がある可能性が考えられる。この点は今後の検討課題としたい。

5. 引用文献

- 荒井龍弥・宇野 忍・工藤与志文・白井秀明（2001）. 小学生の動物概念学習における縮小過剰型誤概念の修正に及ぼす境界的事例群の効果 教育心理学研究, 49(2), 230-239.
- 蛭名正司（2022）. 割合の非加法性に関する理解調査—中学1年生を対象として— 日本教授学習心理学会第18回年会予稿集, 36-37.
- 伏見陽児（1995）. 概念教授の心理学—提示事例の有効性— 川島書店
- 銀林浩（1975）量の世界—構造主義的分析— 麥書房
- Koay, P. L.（1998）. The knowledge of percent of pre-service teachers. *The mathematics Educator*, 3(2), 54-69.
- 工藤与志文・進藤聡彦・麻柄啓一（2022）. 思考力を育む「知識操作」の心理学—活用力・問題解決力を高める「知識変形」の方法— 新曜社
- 麻柄啓一（1992）. 内包量概念に関する児童の本質的なつまずきとその修正 教育心理学研究, 40(1), p20-28.
- 麻柄啓一・進藤聡彦・工藤与志文・立木徹・植松公威・伏見陽児（2006）. 学習者の誤った知識をどう修正するか—ル・パー修正ストラテジーの研究— 東北大学出版会
- Stavy, R., & Tirosh, D.（2000）. *How students (mis-)understanding science and mathematics: Intuitive rules*. New York: Teachers College Press.
- 田端輝彦（2003）. 同種の量の割合の導入に関する一考察 日本数学教育学会誌, 85(12), 3-13.
- 高橋丈夫・田端輝彦・市川啓（2014）. 割合の導入時における比例関係の顕在化に関する一考察—同じ割合の数対を作ることを通して— 日本数学教育学会誌, 96(4), 4-15.
- 遠山啓（1978）. 量とは何か— I 内包量・外延量— 太郎次郎社
- 土屋利美（2002）. 比例の見方を用いた「割合」の指導実践 日本数学教育学会誌, 84(8), 30-37.
- 吉田甫（2003）. 学力低下をどう克服するか—子どもの目線から考える— 新曜社

6. 付記

本研究は JSPS 科研費 19K14345 の助成を受けて実施された。